

JUNIO 2015

(3.5 pts) ② Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t), t \geq 0 \\ x(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ . Dado  $h = 10^{-2}$  se considera la red de puntos formada por los nodos  $t_i = ih$  para  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Al aplicar el método de Taylor de orden 2 para aproximar la solución del sistema (1) se obtiene la sucesión  $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ . Determinar para qué valores de  $x \in \mathbb{R}$  se puede afirmar que  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$  independientemente del dato inicial  $\xi_0$ .

(3.5 pts) ③ Se considera el problema de contorno:

$$\begin{cases} x''(t) = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t), t \in [t_0, T] \\ x'(t_0) = \alpha \\ x(T) = \beta \end{cases} \quad (2)$$

a) Explicar en qué consiste el método de tiro aplicado al problema (2).

b) Enunciar y demostrar la alternativa de Fredholm.

(3 pts) ④ Hallar el orden del método en función de los valores  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $r$ .

c) Para qué valores el orden es máximo?

$$x_{i+1} = x_i + h \left( \alpha f(t_i, x_i) + \beta \underset{h}{f(t_{i+1}, x_i + \delta f(t_i, x_i))} \right) \quad (\text{no estoy segura de las } h)$$

JUNIO 2014

② se considera el problema de valor inicial  
(3'5 ptes)

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} x(t), t \geq 0 \\ x(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ . Dado  $h = 10^{-3}$  se considera la red de puntos formada por los nodos  $t_i = ih$  para  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Al aplicar el método de Euler Modificado

se da  $\begin{cases} x_0 \approx \xi_0 \\ x_{i+1} = x_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i)\right), i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$  para aproximar la

solución del problema (1) se obtiene la secuencia  $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ . Determinar para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  se puede afirmar que  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$  independientemente del dato inicial  $\xi_0$ .

Sea  $A = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ . veamos antes de nada que es diagonalizable:

razable:

$$\begin{vmatrix} -100-\lambda & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (-100-\lambda)(\alpha-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -100 \\ \lambda = \alpha \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = -100 \text{ y } \lambda_2 = \alpha \text{ son}$$

los autovalores de la matriz  $A$ . Hallamos sus auto vectores.

$$\boxed{\lambda_1 = -100} \quad \ker(A + 100I) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha+100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{y=0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{\lambda_2 = \alpha} \quad \ker(A - \alpha I) = \left\{ \begin{pmatrix} -100-\alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{-(100+\alpha)x + y = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 100+\alpha \end{pmatrix} \right\rangle$$

luego tendremos  $D = P^{-1}AP$ , donde.

$$D = \begin{pmatrix} -100 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 100+\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{100+\alpha} \\ 0 & \frac{1}{100+\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

El método de Euler modificado es:

$$\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_{i+1} = x_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i)\right) \end{cases}$$

luego aplicando este método al problema nos queda:

$$x_{i+1} = x_i + h A \left( x_i + \frac{h}{2} A x_i \right) = x_i + h A x_i + \frac{(hA)^2}{2} x_i = x_i \left( I + hA + \frac{(hA)^2}{2} \right)$$

Como hemos comprobado que la matriz  $A$  es diagonalizable, tendremos  $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}$ . Sustituyendo en lo obtenido:

$$x_1 = x_0 \left( I + hA + \frac{(hA)^2}{2} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ I = PP^{-1}}}{=} x_0 \left( PP^{-1} + hPDP^{-1} + \frac{(hPDP^{-1})^2}{2} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}}}{=}$$

$$= x_0 \left( PP^{-1} + hPDP^{-1} + \frac{h^2 PD^2 P^{-1}}{2} \right) = x_0 P \left( I + hD + \frac{h^2 D^2}{2} \right) P^{-1}$$

Ahora supongamos cierto el resultado para  $n-1$ , es decir, supongamos que  $x_{n-1} = x_0 P \left( I + hD + \frac{(hD)^2}{2} \right)^{n-1} P^{-1}$ . Veamos que se verifica para  $n$ :

$$x_n = x_{n-1} P \left( I + hD + \frac{(hD)^2}{2} \right) P^{-1} = x_0 P \left( I + hD + \frac{(hD)^2}{2} \right)^{n-1} P^{-1} P \left( I + hD + \frac{(hD)^2}{2} \right) P^{-1} =$$

$$= x_0 P \left( I + hD + \frac{(hD)^2}{2} \right)^n P^{-1} \Rightarrow \text{Por inducción hemos demostrado que}$$

$$x_i = x_0 P \left( I + hD + \frac{(hD)^2}{2} \right)^i P^{-1}$$

$$\text{Entonces tendremos que } x_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \left( I + hD + \frac{(hD)^2}{2} \right)^i \rightarrow 0, \text{ es}$$

$$\text{decir, si y sólo si } \left| I + hD + \frac{(hD)^2}{2} \right| < 1.$$

$$I + hD + \frac{(hD)^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100h & 0 \\ 0 & \alpha h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(-100)^2 h^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2 h^2}{2} \end{pmatrix} =$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} (-100)^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 100h + \frac{(-100)^2 h^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \alpha h + \frac{(\alpha h)^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad |1 - 100h + \frac{(-100h)^2}{2}| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 1 - 100h + \frac{(-100h)^2}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < -100h + \frac{10000h^2}{2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \frac{-100}{10000}h + \frac{10000}{2} \frac{1}{1000000} < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$h = 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow -2 < \frac{-1}{10} + \frac{1}{200} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \frac{-2011}{200} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \frac{-19}{200} < 0 \quad (\checkmark) \text{ se verifica}$$

$$\bullet \quad \left| 1 + \alpha h + \frac{\alpha^2 h^2}{2} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 1 + \alpha h + \frac{(\alpha h)^2}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \frac{\alpha}{10^5} + \frac{\left(\frac{\alpha}{10^5}\right)^2}{2} < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < \frac{\alpha}{10^5} + \frac{\alpha^2}{2 \cdot 10^{10}} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \frac{1}{10^5} \left( \alpha + \frac{\alpha^2}{2 \cdot 10^5} \right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2000 < \alpha + \frac{\alpha^2}{2 \cdot 10^5} < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2000 < \alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{2 \cdot 10^5} \right) < 0$$

Eske diemos cuñado  $\alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{2 \cdot 10^5} \right) < 0$ . Tenemos dos posibilidades.

$$1) \quad \begin{cases} \alpha > 0 \\ 1 + \frac{\alpha}{2 \cdot 10^5} < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < -2000 \quad \rightarrow \text{Incompatible con la otra.}$$

$$2) \quad \begin{cases} \alpha < 0 \\ 1 + \frac{\alpha}{2 \cdot 10^5} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > -2000 \quad \rightarrow \quad \alpha \in (-2000, 0).$$

Veamos ahora si  $\forall \alpha \in (-2000, 0)$  se verifica  $-2000 < \alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{2000} \right)$ .

$$\text{Sea } \alpha = -1000, \text{ nos queda } -2000 < -1000 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow -2000 < -500 \quad (\checkmark).$$

Por tanto,  $\forall \alpha \in (-2000, 0)$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

① Para  $f$  suficientemente regular, determinar el orden del  
(3'5 pts)

método  $x_{i+1} = x_i + h (\lambda f(t_i, x_i) + (1-\lambda) f(t_{i+1}, x_i + h f(t_i, x_i)))$  en  
función del parámetro  $\lambda$ . ¿Para qué valores de  $\lambda$  el método tiene  
orden máximo? ¿Cuál es el orden máximo?

Tenemos el método:

$$x_{i+1} = x_i + h \underbrace{(\lambda f(t_i, x_i) + (1-\lambda) f(t_{i+1}, x_i + h f(t_i, x_i)))}_{\phi(t_i, x_i, h)}$$

El error local de truncamiento, que nos determinará el orden del método,

viene dado por:  $\tau_{i+1}(h) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} - \phi(t_i, x(t_i), h)$

Hacemos los desarrollos de Taylor necesarios:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + h x'(t_i) + \frac{h^2}{2} x''(t_i) + \frac{h^3}{6} x'''(t_i) + \frac{h^4}{24} x^{(4)}(t_i) + O(h^5)$$

$$x'(t_{i+1}) = x'(t_i) + h x''(t_i) + \frac{h^2}{2} x'''(t_i) + \frac{h^3}{6} x^{(4)}(t_i) + O(h^5)$$

Tenemos que  $\phi(t_i, x(t_i), h) = \lambda f(t_i, x(t_i)) + (1-\lambda) f(t_{i+1}, x(t_i) + h f(t_i, x(t_i))) =$

$$= \lambda x'(t_i) + (1-\lambda) f(t_{i+1}, x(t_{i+1})) = \lambda x'(t_i) + (1-\lambda) x'(t_{i+1})$$

luego el error local de truncamiento nos queda:

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}(h) &= \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} - \phi(t_i, x(t_i), h) = \\ &= \frac{x(t_i) + h x'(t_i) + \frac{h^2}{2} x''(t_i) + \frac{h^3}{6} x'''(t_i) + \frac{h^4}{24} x^{(4)}(t_i) + O(h^5) - x(t_i)}{h} - \\ &\quad - \left[ \lambda x'(t_i) + (1-\lambda) \left[ x'(t_i) + h x''(t_i) + \frac{h^2}{2} x'''(t_i) + \frac{h^3}{6} x^{(4)}(t_i) + O(h^5) \right] \right] = \\ &= x'(t_i) + \frac{h}{2} x''(t_i) + \frac{h^2}{6} x'''(t_i) + \frac{h^3}{24} x^{(4)}(t_i) + O(h^4) - \left[ \lambda x'(t_i) + h x''(t_i) - \lambda h x''(t_i) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^2}{2} x'''(t_i) - \lambda \frac{h^2}{2} x'''(t_i) + \frac{h^3}{6} x^{(4)}(t_i) - \lambda \frac{h^3}{6} x^{(4)}(t_i) + O(h^5) \right] = \end{aligned}$$

$$= x''(t_i) \left( \frac{h}{2} - h + \lambda h \right) + x'''(t_i) \left( \frac{h^2}{6} - \frac{h^2}{2} + \lambda \frac{h^2}{2} \right) + x^{(4)}(t_i) \left( \frac{h^3}{24} - \frac{h^3}{6} + \lambda \frac{h^3}{6} \right) + O(h^4) + O(h^5) =$$

$$= x''(t_i) \cdot h \left( \lambda - \frac{1}{2} \right) + x'''(t_i) \cdot \frac{h^2}{6} (3\lambda - 2) + x^{(4)}(t_i) \cdot \frac{h^3}{48} (-6 + 8\lambda) + O(h^4)$$

Ahora ya estamos en condiciones de determinar el parámetro  $\lambda$  para que el orden del método sea máximo:

$$\lambda - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$3\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{El orden del método será 2, ya}$$

$$\text{que: } \|\tau_{i+1}(h)\| \leq c \left( \|x''(t_i) \cdot 0\|_{\infty} + \|x'''(t_i) \cdot \frac{h^2}{6} (3 \cdot \frac{1}{2} - 2)\|_{\infty} + \|x^{(4)}(t_i) \cdot \frac{h^3}{48} (-6 + 8 \cdot \frac{1}{2})\|_{\infty} + O(h^4) \right)$$

$$\text{Sea } \tau(h) = \max_{i=1, \dots, N} \|\tau_i(h)\|. \text{ Entonces, siendo:}$$

$$M_3 = \max_{t \in [t_0, T]} \|x'''(t)\|_{\infty}, \quad M_4 = \max_{t \in [t_0, T]} \|x^{(4)}(t)\|_{\infty} \quad \text{nos queda:}$$

$$\tau(h) \leq c M_3 \left( -\frac{1}{12} \right) h^2 + c M_4 \left( -\frac{1}{24} \right) h^3 + O(h^4) = O(h^2).$$

③ Se considera el problema de contorno singular:  
(3 pts)

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{x'(t)}{t} + r(t), t \in [0, 1] \\ x'(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

con  $r \in C([0, 1])$ , Supuesto que (2) tiene una única solución  $x \in C^4([0, 1])$ ,

tomando  $h = \frac{1}{N+1}$  y  $t_i = ih$  para  $i = 0, 1, \dots, N+1$ , se pide:

a) Probar que el vector  $x = (x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_N))^T$  es solución del sistema  $A_h x = b_h + h^2 \tau(h)$ , donde  $A_h$  es una matriz tridiagonal,  $b_h$  es un vector que depende de  $\{r(t_i), h\}$  y  $\tau(h)$  es un vector que contiene los errores en las aproximaciones por diferencias finitas. Explicitar la matriz  $A_h$  y el vector  $b_h$ .

b) Comprobar que  $\|\tau(h)\|_\infty = O(h)$ .

#### Indicaciones:

I) En los nodos interiores  $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ , usar los desarrollos de Taylor:

$$x'(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} x'''(\eta_i), \eta_i \in (t_{i-1}, t_{i+1}).$$

$$x''(t_i) = \frac{x(t_{i-1}) - 2x(t_i) + x(t_{i+1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} x^{(4)}(\nu_i), \nu_i \in (t_{i-1}, t_{i+1}).$$

para obtener un sistema de  $N$  ecuaciones con  $N+1$  incógnitas  $\{x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_N)\}$ .

II) Para obtener una ecuación más, proceder de la siguiente manera:

• Mediante un desarrollo de Taylor, demostrar que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x'(h)}{h} = x''(0)$  (3)

• Utilizando (3) en la ecuación diferencial del problema (2), comprobar que  $x''(0) = \frac{r(0)}{2}$ . (4)

• Discretizar (4) utilizando el desarrollo de Taylor:

$$x(h) = x(0) + x'(0)h + \frac{1}{2} x''(0)h^2 + \frac{1}{6} x'''(\xi)h^3, \xi \in (0, h).$$

El sistema que tenemos es el siguiente

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{x'(t)}{t} + r(t), & t \in [0,1] \\ x'(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases} \quad \text{Ad} \begin{cases} x''(t) = p(t)x'(t) + r(t), & t \in [0,1] \\ x'(0) = 0 \Rightarrow x'(t_0) = 0 \\ x(1) = 0 \Rightarrow x(t_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

Para los nodos interiores sustituyamos los derivadas de Taylor

de la indicación (I) en (2):

$$x(t_{i+1}) = x_i, \quad x(t_i) = x_i$$

$$\frac{x(t_{i+1}) - 2x(t_i) + x(t_{i-1}))}{h^2} = \left( \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1}))}{2h} \right) p(t_i) + r(t_i) + \frac{h^2}{12} x'''(t_i) - \frac{h^2}{6} x'''(t_i) p(t_i)$$

$$\text{Ad} \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h} p_i + r_i + \frac{h^2}{12} x'''(t_i) - \frac{h^2}{6} x'''(t_i) p_i$$

Ahora sea  $M_4 = \max_{t \in [0,1]} |x^{(4)}(t)|$  y  $M_3 = \max_{t \in [0,1]} |x'''(t)|$ . Abs

queda que  $\frac{1}{12} x^{(4)}(t_i) - 2 \frac{1}{6} x'''(t_i) p_i = \sigma_i(h) \Rightarrow |\sigma_i(h)| \leq M_4 + 2 M_3 p_{\max}$

$$p_{\max} = \max_{t \in [0,1]} |p(t)|$$

Luego la expresión de las ecuaciones es:

$$\frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h} p_i + r_i + \frac{h^2}{12} \sigma_i(h) \quad \text{Ad} \quad \text{multiplica la igualdad por } -h^2$$

$$\text{Ad} -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = \left(-\frac{h}{2} x_{i+1} + \frac{h}{2} x_{i-1}\right) p_i + r_i - \frac{h^4}{12} \sigma_i(h) \quad \text{Ad}$$

$$\text{Ad} x_{i-1} \left(-1 + \frac{h}{2} p_i\right) + 2x_i + x_{i+1} \left(-1 + \frac{h}{2} p_i\right) = r_i - \frac{h^4}{12} \sigma_i(h) \quad \text{Ad}$$

$$\text{Ad} -x_{i-1} \left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) + 2x_i - x_{i+1} \left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) = r_i - \frac{h^4}{12} \sigma_i(h)$$

Por tanto, para los nodos interiores  $t_1, \dots, t_N$  me ha

quedado la ecuación:

$$-x_{i-1} \left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) + 2x_i - x_{i+1} \left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) = r_i - \frac{h^4}{12} \sigma_i(h).$$

$$\text{Llamemos } a_i = 2 + q_i h^2 = 2, \quad b_i = 1 + \frac{h}{2} p_i \quad y \quad c_i = 1 - \frac{h}{2} p_i \Rightarrow$$

$\uparrow$   
 $q_i = 0$

$$\Rightarrow -x_{i-1} b_i + x_i a_i - x_{i+1} c_i = r_i - \frac{h^4}{12} \sigma_i(h), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Ahora nos falta hallar la primera ecuación, que se corresponde con  $i = 0$ .

Para ello seguiremos la indicación (II):

Hacemos el desarrollo de Taylor:

$$x(h) = x(0) + x'(0) \cdot h + x''(0) \frac{h^2}{2}$$

$$x'(h) = x'(0) + h x''(0) \Rightarrow x'(h) = h x''(0) \Rightarrow x''(0) = \frac{x'(h)}{h} \Rightarrow$$

$\uparrow$   
 $x'(0) = 0$  por hipótesis del problema

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x'(h)}{h} = x''(0).$$

Ahora tengo  $x''(0) \approx -\frac{x'(0)}{0} + r(0)$ , pero como esta expresión

no tiene sentido debido al cero del denominador, obtengo  $x''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{x'(h)}{h} +$

$$+ r(0). \text{ Luego } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x'(h)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x'(h)}{h} + r(0) \Rightarrow 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x'(h)}{h} = r(0) \Rightarrow$$

$\uparrow$   
 $x''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x'(h)}{h}$

$$\Rightarrow 2 x''(0) = r(0) \Rightarrow x''(0) = \frac{r(0)}{2}.$$

Finalmente me queda .

$$M_3 = \max_{t \in [0,1]} |x'''(t)|$$

$$x(h) = x(0) + x'(0) \cdot h + \frac{h^2}{2} x''(0) + \frac{h^3}{6} x'''(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(h) = x(0) + \frac{h^2}{2} x''(0) + \frac{h^3}{6} M_3 \Rightarrow x(h) = x(0) + \frac{h^2}{4} r(0) + \frac{h^3}{6} M_3 \Rightarrow$$

$x''(0) = \frac{r(0)}{2}$

$$\Rightarrow x(h) = x_0 + \frac{h^2}{4} r_0 + \frac{h^3}{6} M_3 \Rightarrow x_0 - x_1 = -\frac{h^2}{4} r_0 + \frac{h^3}{6} M_3.$$

$x(h) = x_1$

Luego el sistema de  $N+1$  ecuaciones con  $N+1$  incógnitas

es:

$$\begin{cases} x_0 - x_1 = -\frac{h^2}{4} r_0 + \frac{h^3}{6} M_3 \Rightarrow x_i - x_{i+1} = -\frac{h^2}{4} r_i + \frac{h^3}{6} M_3, i = 0. \\ -x_{i-1} \left(1 + \frac{h}{2} p_i\right) + \frac{2}{h} x_i - x_{i+1} \left(1 - \frac{h}{2} p_i\right) = r_i + \frac{h^2}{12} \sigma_i(h), i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

En forma matricial queda:  $A_h x = b_h + h^2 \tau(h)$ , donde:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -b_1 & a_1 & -c_1 & & \\ & -b_2 & a_2 & -c_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -b_N & a_N \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix}, b_h = \begin{pmatrix} -\frac{h^2}{4} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{h^2}{4} r_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y \quad \tau(h) = \begin{pmatrix} \frac{h}{6} M_3 \\ \frac{h^2}{12} \sigma_1(h) \\ \vdots \\ \frac{h^2}{12} \sigma_N(h) \end{pmatrix}. \text{ Se ve claramente que } \|\tau(h)\|_{\infty} = O(h).$$

(por el primer término de  $\tau(h)$ ).

# EXAMEN ELSA - JUNIO 2013

① ES EL ① DEL EXAMEN DE FEBRERO DE 2005.

② Se considera el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = \begin{pmatrix} \alpha & 5 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} x(t), t \geq 0, h = 10^{-3}, x_0 \in \mathbb{R}^2 \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Se considera la red de puntos formada por los nodos  $t_i = ih$  para  $i=0,1,2,\dots$ . Al aplicar el método de Euler explícito para aproximar la solución del problema (1) se obtiene la secuencia  $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ . Determinar para qué valores de  $\alpha \in \mathbb{R}$  se puede afirmar que  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ , independientemente del dato inicial  $x_0$ .

$$\text{El método de Euler explícito es } \begin{cases} x_{i+1} = x_i + h f(t_i, x_i) \\ x_0 = x_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{luego aplicando este método obtenemos } x_{i+1} &= x_i + h A x_i = 0 \\ \Rightarrow x_{i+1} &= (I + hA) x_i. \end{aligned}$$

Veamos si la matriz  $A$  es diagonalizable, es decir, si existen matrices  $P$  y  $D$ , con  $D$  diagonal, tales que  $P^{-1}AP = D$ .

Hallamos el polinomio característico  $A$  para calcular sus autovalores.

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 5 \\ 0 & -10 - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)(-10 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \alpha \\ \lambda = -10 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \alpha \text{ y } \lambda_2 = -10$$

son los autovalores de la matriz  $A$ . Hallamos sus respectivos autovectores:

$$\boxed{\lambda_1 = \alpha} \quad \ker(A - \alpha I) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -10 - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 5y = 0 \\ (-10 - \alpha)y = 0 \end{matrix} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\boxed{\lambda_2 = -10} \quad \ker(A + 10I) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + 10 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \langle (\alpha + 10)x + 5y = 0 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ -\alpha - 10 \end{pmatrix} \rangle$$

Por tanto me quedará :  $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$  y  $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -\alpha - 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{\alpha + 10} \\ 0 & \frac{-1}{\alpha + 10} \end{pmatrix} \quad \text{Como } D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

Entonces tendremos :  $x_1 = (I + hA)x_0 = (I + hPDP^{-1})x_0 \overset{I = PP^{-1}}{\downarrow} =$

$$= (PP^{-1} + hPDP^{-1})x_0 = P(I + hD)P^{-1}x_0$$

$$x_2 = (I + hA)x_1 = (I + hA)P(I + hD)P^{-1}x_0 =$$

$$= P(I + hD) \overset{I}{P^{-1}P} (I + hD)P^{-1}x_0 = P(I + hD)^2 P^{-1}x_0$$

Por inducción obtenemos que  $x_i = P(I + hD)^i P^{-1}x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_i = P \begin{pmatrix} (1 + \alpha h)^i & 0 \\ 0 & (1 - 10h)^i \end{pmatrix} P^{-1}x_0$$

Tendremos que  $x_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow |I + hD| < 1$

- $|1 + \alpha h| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 + \alpha h < 1 \Leftrightarrow -2 < \alpha h < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{h} < \alpha < 0 \Leftrightarrow -2 \cdot 10^3 < \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-2000, 0)$$

$\uparrow$   
 $h = 10^{-3}$

- $|1 - 10h| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - 10h < 1 \Leftrightarrow -2 < -10h < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{10} < -h < 0 \Leftrightarrow 10 < \frac{2}{h} = \frac{2}{10^{-3}} = 2000, \text{ que es cierto.}$$

Luego si  $\alpha \in (-2000, 0)$ , se cumplirá que  $x_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ .

③ Dado el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} x''(t) = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t), & t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = \alpha \\ x(T) = \beta \end{cases}$$

a) Demuestra que si  $q(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$ , el problema tiene una única solución.

b) En el método de tiro podemos determinar el parámetro de disparo después de dos instantes.

$$\begin{cases} v_1''(t) = p(t)v_1'(t) + q(t)v_1(t) + r(t) \\ v_1(t_0) = \alpha_1 \\ v_1'(t_0) = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} v_2''(t) = p(t)v_2'(t) + q(t)v_2(t) + r(t) \\ v_2(t_0) = \alpha_2 \\ v_2'(t_0) = \alpha \end{cases} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$$

Expresa la solución del problema como combinación lineal de  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$ .

a) Copiar hoja 101 de los apuntes de teoría.

b)

JUNIO 2005

② Predictor:  $x_{t+3} = x_{t+2} + \frac{12}{h} (23 f(t_{t+2}, x_{t+2}) - 16 f(t_{t+1}, x_{t+1}) + 5 f(t_t, x_t))$ , de

orden 3.

Corrector:  $x_{t+3} = x_{t+2} + \frac{24}{h} (9 f(t_{t+3}, x_{t+3}) + 19 f(t_{t+2}, x_{t+2}) - 5 f(t_{t+1}, x_{t+1}) + f(t_t, x_t))$

+  $f(t_t, x_t)$ , de orden 4.

Obtener de forma explícita el método resultante y probar que es

orden 5, al menos, y.

En primer lugar definimos el método de predicción - corrección:

$$\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_{t+2}^* = x_{t+2} + \frac{12}{h} (23 f(t_{t+2}, x_{t+2}) - 16 f(t_{t+1}, x_{t+1}) + 5 f(t_t, x_t)) \\ x_{t+3} = x_{t+2}^* + \frac{24}{h} (9 f(t_{t+3}, x_{t+3}^*) + 19 f(t_{t+2}, x_{t+2}) - 5 f(t_{t+1}, x_{t+1}) + f(t_t, x_t)) \end{cases}$$

Hallamos ahora los errores de truncamiento de ambos métodos.

El error de truncamiento en métodos lineales viene dado por:

$$\tau_{n+1}^m(h) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (x_k x'(t_{k,n}) - h \beta_k x'(t_{k,n}))$$

En el método de predicción tenemos:

$$\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_1 = \alpha_0 = 0 \Rightarrow p(z) = z^3 - z^2 = z^2(z-1)$$

$$\beta_3 = 0, \beta_2 = \frac{12}{23}, \beta_1 = -\frac{12}{16}, \beta_0 = \frac{12}{5} \Rightarrow q(z) = \frac{12}{5} z^3 - \frac{12}{16} z^2 + \frac{12}{23} z - \frac{12}{5} \Rightarrow q(1) = 1$$

luego:  $\tau_{n+3}^m(h) = \frac{1}{n!} (x_0 x'(t_1) - h \beta_0 x'(t_1) + \alpha_1 x'(t_{1,1}) - h \beta_1 x'(t_{1,1}) +$

$$+ \alpha_2 x'(t_{1,2}) - h \beta_2 x'(t_{1,2}) + \alpha_3 x'(t_{1,3}) - h \beta_3 x'(t_{1,3})) = \frac{1}{n!} (-\frac{12}{5} h f(t_1, x(t_1)) -$$

$$+ h \frac{12}{16} f(t_{1,1}, x(t_{1,1})) - x(t_{1,2}) - h \frac{12}{23} f(t_{1,1}, x(t_{1,1})) + x(t_{1,3})) =$$

$$\Rightarrow \tau_{n+3}^m(h) = \frac{h}{x(t_{1,3}) - x(t_{1,2})} - \left( \frac{12}{5} f(t_1, x(t_1)) - \frac{12}{16} f(t_{1,1}, x(t_{1,1})) + \frac{12}{23} f(t_{1,1}, x(t_{1,1})) + \frac{12}{5} f(t_{1,2}, x(t_{1,2})) \right)$$

En el método de corrección tenemos:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_1 = \alpha_0 = 0 \Rightarrow p(z) = z^3 - z^2 \\ \beta_3 = \frac{9}{24}, \beta_2 = \frac{19}{24}, \beta_1 = \frac{-5}{24}, \beta_0 = \frac{-1}{24} \Rightarrow p(z) = \frac{1}{24}(9z^3 + 19z^2 - 5z + 1) = 0 \Rightarrow p(1) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Logo } \tau_{i+3}(h) = \frac{1}{h} (\alpha_0 x(t_i) - h\beta_0 x'(t_i) + \alpha_1 x(t_{i+1}) - h\beta_1 x'(t_{i+1}) + \alpha_2 x(t_{i+2}) -$$

$$- h\beta_2 x'(t_{i+2}) + \alpha_3 x(t_{i+3}) - h\beta_3 x'(t_{i+3})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{i+3}(h) = \frac{x(t_{i+3}) - x(t_{i+2})}{h} - \left( \frac{1}{24} f(t_i, x(t_i)) - \frac{5}{24} f(t_{i+1}, x(t_{i+1})) + \frac{19}{24} f(t_{i+2}, x(t_{i+2})) + \right.$$

$$\left. + \frac{9}{24} f(t_{i+3}, x(t_{i+3})) \right)$$

Ahora definimos el error de truncamiento del método predictor-

corrector:

$$\tau_{i+1}^{\text{pred}}(h) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} - \frac{1}{24} (9 f(t_i, x(t_i)) - 5 f(t_{i+1}, x(t_{i+1})) + 19 f(t_{i+2}, x(t_{i+2})) +$$

$$+ 9 f(t_{i+3}, x(t_{i+3}))) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} - \frac{1}{24} (f(t_i, x(t_i)) - 5 f(t_{i+1}, x(t_{i+1})) + 19 f(t_{i+2}, x(t_{i+2})) +$$

$$+ 9 f(t_{i+3}, x(t_{i+3}))) + \frac{9}{24} f(t_{i+3}, x(t_{i+3})) - \frac{9}{24} f(t_{i+3}, x(t_{i+3})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{i+1}^{\text{pred}}(h) = \tau_{i+3}(h) + \frac{9}{24} [f(t_{i+3}, x(t_{i+3})) - f(t_{i+3}, x(t_{i+3}))] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{i+1}^{\text{pred}}(h) \leq \| \tau_{i+3}(h) \| + \frac{9}{24} \| f(t_{i+3}, x(t_{i+3})) - f(t_{i+3}, x(t_{i+3})) \|$$

Como  $f$  es Lipschitz en la segunda variable, nos queda:

$$\| f(t_{i+3}, x(t_{i+3})) - f(t_{i+3}, x^*(t_{i+3})) \| \leq L \| x(t_{i+3}) - x^*(t_{i+3}) \|$$

$$\text{Logo } \tau_{i+1}^{\text{pred}}(h) \leq \| \tau_{i+3}(h) \| + \frac{9}{24} L \| x(t_{i+3}) - x^*(t_{i+3}) \|$$

$$\text{Ahora: } x(t_{i+3}) - x^*(t_{i+3}) = x(t_{i+3}) - x(t_{i+2}) - \frac{h}{12} (23 x'(t_{i+2}) -$$

$$- 16 x'(t_{i+1}) + 5 x'(t_i))$$

$$\text{Entonces } \tau_{i+1}^{\text{pred}}(h) \leq \| \tau_{i+3}(h) \| + \frac{9}{24} L h \| \tau_{i+3}(h) \| =$$

$$= O(h^4) + \frac{9}{24} L h O(h^4) = O(h^4) = O(h^4) \Rightarrow \text{El método de predic-}$$

ción=corrección es de orden 4.